

**РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ**

УДК 621.372.061

**ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ RTF ТА ФУР'Є**

*Рибін О.І., д.т.н. професор, Іванюк Н.О., аспірантка*  
*Національний технічний університет України*  
*«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна*

**Теорема про диференціювання оригіналів**

Теорема перетворення Фур'є про диференціювання оригіналів при розв'язанні диференціальних рівнянь (разом із відомим фактом, що відгук лінійної системи на гармонічну дію частоти  $\omega_0$  є гармонікою тієї самої частоти, але іншої амплітуди та початкової фази) є основою створення спектральних методів аналізу диференціальних рівнянь рівноваги лінійних систем та споріднених з Фур'є методів, основаних на перетворенні Лапласа, Z-перетворенні, дискретних версіях перетворень Фур'є та Лапласа. При цьому диференціальні співвідношення стають алгебраїчними, і системи лінійних диференціальних рівнянь перетворюються у комплексні лінійні алгебраїчні рівняння. Перетворення Фур'є для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь рівноваги лінійних кіл та систем є найбільш поширеним, економічним та зручним в сучасній практиці. В той самий час, існування великої кількості ортогональних перетворень, поширених в сучасних наукових дослідженнях, робить задачу створення методів аналізу лінійних систем на базі інших перетворень (споріднених з Фур'є та відмінних від нього) актуальною.

Тому розглянемо теорему про диференціювання оригіналів для відмінних від Фур'є дискретних ортогональних перетворень [1 - 7].

Так, для будь-якого дискретного ортогонального перетворення формату  $N = 2^n$ ,  $n$  — ціле позитивне число, з матричним оператором  $\bar{W}$  цього перетворення можна записати

$$\bar{X}_\xi = \bar{W} \times \bar{x}_t, \quad (1a)$$

де  $\bar{x}_t$  — стовпець дискретних відліків сигналу в натуральних координатах розміру  $N \times 1$ ;  $\bar{X}_\xi$  — стовпець амплітуд трансформант перетворення (спектральних складових) того ж розміру;  $\bar{W}$  — матриця порядку  $N$ .

Зворотне перетворення має вигляд

$$\bar{x}_t = \bar{W}^{-1} \times \bar{X}_\xi, \quad (1б)$$

де  $\bar{W}^{-1}$  — матричний оператор зворотного перетворення.

Для дискретних методів аналізу лінійних систем розв'язання диференціальних рівнянь базується на різницевих методах, для реалізації яких треба мати сітку значень (відліків) дії вздовж аргументу в натуральних координатах. Так, для виразу (1) такими відліками є стовпці матриці  $\bar{W}^{-1}$  та рядки матриці  $\bar{W}$ . Якщо ці матриці нормовані (середня потужність трансформант дорівнює одиниці) то похідну у вигляді стовпця відліків можна знайти не за похідною від  $\bar{x}_t$  (і далі знайти за (1a) стовпець відліків похідної  $\bar{x}_{dt}$  та його спектр  $\bar{X}_{\xi d}$ ), а за матричними операторами  $\bar{W}^{-1}$  та  $\bar{W}$ .

Похідну  $\frac{d}{dt}(\bar{W}_n)$  від нормованого матричного оператора  $\bar{W}_n$  (обчислену за різницевою схемою) позначимо як  $\bar{D}_n$ .

Тоді з (1б) отримаємо

$$\bar{x}_{dt} = \bar{D}_n^T \times \bar{X}_\xi = \bar{D}_n^T \times \bar{W}_n \times \bar{x}_t, \quad (2a)$$

а з (1a) отримаємо

$$\bar{X}_{\xi d} = \bar{W}_n^{-1} \times \bar{D}_n^T \times \bar{X}_\xi. \quad (2б)$$

Позначимо тепер  $\bar{A}_t = \bar{D}_n^T \times \bar{W}_n$ ;  $\bar{A}_\xi = \bar{W}_n^{-1} \times \bar{D}_n^T$ .

Тоді теорему про диференціювання оригіналу для дискретних методів аналізу можна записати у вигляді

$$\text{Якщо } \bar{x}_t \leftrightarrow \bar{X}_\xi, \text{ то } \bar{x}_{dt} \leftrightarrow \bar{W}_n^{-1} \times \bar{D}_n^T \times \bar{X}_\xi = \bar{A}_\xi \times \bar{X}_\xi, \quad (3)$$

причому  $\bar{x}_{dt} = \bar{A}_t \times \bar{x}_t$ .

Формула (3) вірна для будь-якого перетворення, причому для різних перетворень матриця  $\bar{A}_t$  буде завжди однаковою, а матриці  $\bar{A}_\xi$  — різними для різних ортогональних перетворень.

Використовуючи (3), лінійне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} & a_m \times \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \times \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \times \frac{dy}{dt} + a_0 \times y = \\ & = b_n \times \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \times \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \times \frac{dx}{dt} + b_0 \times x \end{aligned} \quad (4)$$

можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & (a_m \times \bar{A}_\xi^m + a_{m-1} \times \bar{A}_\xi^{m-1} + \dots + a_1 \times \bar{A}_\xi + a_0 \times \bar{E}) \times \bar{Y}_\xi = \\ & (b_n \times \bar{A}_\xi^n + b_{n-1} \times \bar{A}_\xi^{n-1} + \dots + b_1 \times \bar{A}_\xi + b_0 \times \bar{E}) \times \bar{X}_\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\bar{E}$  — одинична матриця.

Позначивши суми в дужках (5) як  $\bar{A}_{\Sigma\xi}$  та  $\bar{B}_{\Sigma\xi}$ , отримаємо

$$\bar{A}_{\Sigma\xi} \times \bar{Y}_\xi = \bar{B}_{\Sigma\xi} \times \bar{X}_\xi, \quad (6a)$$

звідки

$$\bar{Y}_\xi = \bar{A}_{\Sigma\xi}^{-1} \times \bar{B}_{\Sigma\xi} \times \bar{X}_\xi, \quad (6б)$$

причому структура матриці  $\bar{D}_{\Sigma\xi} = \bar{A}_{\Sigma\xi}^{-1} \times \bar{B}_{\Sigma\xi}$  різна для різних перетворень  $\bar{W}_h$ . Так, у випадку, якщо  $\bar{W}_h$  — матричний оператор перетворення Фур'є, матриця  $\bar{D}_{\Sigma\xi}$  є діагональною, якщо  $\bar{W}_h$  — матричний оператор перетворення Адамара, то  $\bar{D}_{\Sigma\xi}$  є блочно-діагональною, в інших випадках (для інших перетворень  $\bar{W}_h$ ) ця матриця має іншу, але певну регулярну структуру. Виходячи з виразу (3) для  $\bar{x}_{dt}$ , можна отримати вираз, аналогічний (6) для відліків у натуральних координатах

$$\bar{A}_{\Sigma t} \times \bar{y}_t = \bar{B}_{\Sigma t} \times \bar{x}_t, \quad (7a)$$

$$\bar{y}_t = \bar{A}_{\Sigma t}^{-1} \times \bar{B}_{\Sigma t} \times \bar{x}_t, \quad (7б)$$

звідки ясно, що матриця  $\bar{D}_{\Sigma t} = \bar{A}_{\Sigma t}^{-1} \times \bar{B}_{\Sigma t}$  є матричним оператором дискретної згортки (циркулянтною матрицею, у якій в кожному рядку записано імпульсну характеристику системи (4), розташовану в зворотному до осі натуральних координат порядку, з посувом на один крок праворуч при переході до наступного рядка).

### Перетворення RTF

Розглянемо випадок, коли дискретний оператор перетворення в (1) є оператором перетворення Фур'є. Тоді в (2б) можна переписати у вигляді

$$\bar{X}_{\omega d} = \bar{F}_h^* \times \bar{D}_{h\omega}^T \times \bar{X}_\omega, \quad (8a)$$

де  $\bar{X}_\omega, \bar{X}_{\omega d}$  — стовпці спектрів вихідного сигналу та його похідної розміру  $N \times 1$ ;  $\bar{F}_h^*$  — матричний оператор нормованого (діленням його рядків на  $\sqrt{N}$ ) зворотного перетворення Фур'є порядку  $N$ ; \* - знак комплексного спряження.

Матрицю  $\bar{A}_\omega = \bar{F}_h^* \times \bar{D}_{h\omega}^T$  можна розкласти на власні значення і власні вектори

$$\bar{A}_\omega = \bar{P}^* \times \bar{\lambda} \times \bar{P}^T,$$

де  $\bar{\lambda}$  — діагональна матриця власних значень матриці  $\bar{A}_\omega$ ;  $\bar{P}^T$  — матриця власних векторів матриці  $\bar{A}_\omega$  (власними векторами є стовпці цієї матриці); T — знак транспонування.

Власні значення будь-якої матриці  $\bar{A}_\xi$  в (2) для будь-якого ортогонального перетворення  $\bar{W}_h$  (тобто і для  $\bar{A}_\omega$ ) незмінні. Власні вектори для різних матриць  $\bar{A}_\xi$  будуть різними і утворюватимуть різні матриці  $\bar{P}^*$  та  $\bar{P}^T$ . В частковому випадку, коли  $\bar{W}_h = \bar{F}_h$ , матриці власних векторів є одиничними. Тобто

$$\bar{\bar{A}}_{\omega} = \bar{\bar{E}} \times \bar{\bar{\lambda}} \times \bar{\bar{E}} \quad (8б)$$

Елементи діагоналі матриці  $\bar{\bar{\lambda}}$  обчислюються за правилом: перші два власних значення дорівнюють:  $\lambda_0=0$ ;  $\lambda_1=2$ , а два наступні:  $\lambda_3=j$ ;  $\lambda_4=-j$ .

Усі власні значення (як і чотири вище згаданих) розташовані на комплексній площині на одиничному крузі (рис 1) з центром в точці (1,0). Наступні чотири власні значення знаходять діленням чотирьох дуг круга

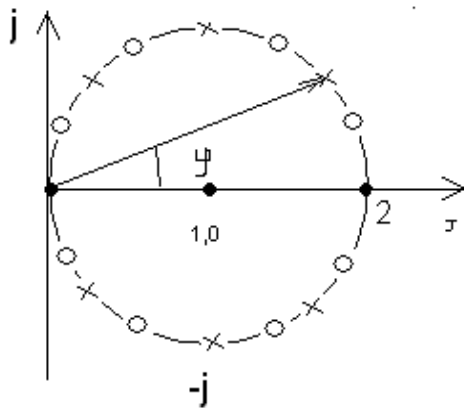


Рис.1

на рівні півдуги (зірочки на рис.1). Для обчислення наступних восьми власних значень вісім дуг ділять на рівні частини (кружечки на рис.1) і т.д. Для впорядкування отриманих власних значень їх нумерацію слід проводити, починаючи від точки (0,0) за ходом годинникової стрілки. При форматі  $N$  перетворення  $\bar{\bar{F}}_n$  кількість власних значень, отриманих за указаним на рис. 1 правилом, становить  $N$ . Причому при подальшому русі за годинниковою стрілкою (після повного оберту)

номер  $k+nN=k$ , де  $k, n$  — цілі числа;  $k < N$ . Значення  $k$ -го відліку ( $k$ -го власного значення) на комплексній площині можна обчислити за формулою (9а)

$$\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} k\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} = 2j \sin\left(\frac{\pi}{N} k\right) e^{-j\frac{\pi}{N} k} \quad (9а)$$

або для неперервного аргументу  $\lambda$ ,

$$\lambda = 2j \sin \varphi e^{-j\varphi}, \quad (9б)$$

причому  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

Формула (8б) дозволяє сформулювати теорему про диференціювання оригіналу для перетворення RTF, отриману на базі (8а)

$$\bar{\bar{X}}_{\omega d} = \bar{\bar{A}}_{\omega} \times \bar{\bar{X}}_{\omega} = \bar{\bar{\lambda}} \times \bar{\bar{X}}_{\omega}, \quad (10)$$

тобто диференціюванню сигналу в області натуральних координат відповідає (10) множення спектру сигналу на  $\lambda$ .

Порівнюючи значення  $\lambda_k$  в (9а) і нормовані частоти класичного дискретного перетворення Фур'є

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \times k \quad (11)$$

слід відмітити різницю, яку особливо помітно, якщо порівняти точки на одиничному крузі на рис.1, що відповідають значенням  $\lambda_k$  та уявну вісь на тому ж рисунку, на якій розташовані нормовані частоти  $\omega_k$ . Причина відмін полягає в тому, що в класичному перетворенні Фур'є диференціюван-

ня проводиться для аналітичних функцій (в точці), в той час, як для перетворення RTF похідні обчислюють як поділені на інтервал між відліками (в даному випадку одиничний) різниці цих відліків. Тобто, наприклад, для першої трансформанти Фур'є такі різниці дорівнюють

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}} - 1 \approx j\omega_1 = j\frac{2\pi}{N} \text{ при } \frac{2\pi}{N} \ll 1. \quad (12)$$

Для більших частот  $\omega_k$  (11) похідні розкладу (12) в ряд Тейлора більш високих порядків, тому похибка обчислень буде зростати із зростанням частоти (номера  $k$  при його наближенні до  $N/2$ ).

Помноживши в (10) стовпці  $\bar{X}_{\omega d}, \bar{X}_{\omega}$  на відповідні матричні оператори перетворення Фур'є, отримаємо матричний вираз

$$\bar{x}_{dt} = \bar{F}_H^* \times \bar{\lambda} \times \bar{F}_H, \quad (13)$$

на основі якого рівняння (5) можна привести до вигляду

$$\bar{y}_t = \bar{F}_H^* \times \bar{K}(\lambda) \times \bar{F}_H \times \bar{x}_t, \quad (14a)$$

що й є матричним записом алгоритму аналізу лінійних систем за допомогою перетворення RTF. Тут  $\bar{K}(\lambda)$  — діагональна матриця функції системи, що зв'язує між собою реакцію системи  $\bar{y}_t$  та дію  $\bar{x}_t$ . Аналогічно, для класичного перетворення Фур'є

$$\bar{y}_t = \bar{F}_H^* \times \bar{K}(j\omega) \times \bar{F}_H \times \bar{x}_t. \quad (14b)$$

Як вже згадувалося, певним недоліком перетворення RTF є внесення додаткового затухання при зростанні частоти (номеру  $k$  комплексної частоти  $\lambda_k$ ) у порівнянні до класичного дискретного перетворення Фур'є. Тим не менше, при вірному виборі кроку дискретизації аналізованого сигналу саме додаткове загасання може стати перевагою RTF у порівнянні до класичного Фур'є. Так, при диференціюванні сигналів класичне перетворення Фур'є дає додаткові осциляції (рис.2), наявність яких зумовлена обмеженою кількістю трансформант при обчисленнях за формулою (14б). При тому самому форматі ( $N = 512$  на рис. 2а та  $N = 256$  на рис. 2б) похідні від прямокутних імпульсів (крива 1) для перетворення RTF дають задовільний результат (крива 3), в той час як похідні, обчислені за виразом (14б) мають значні паразитні осциляції (крива 2).

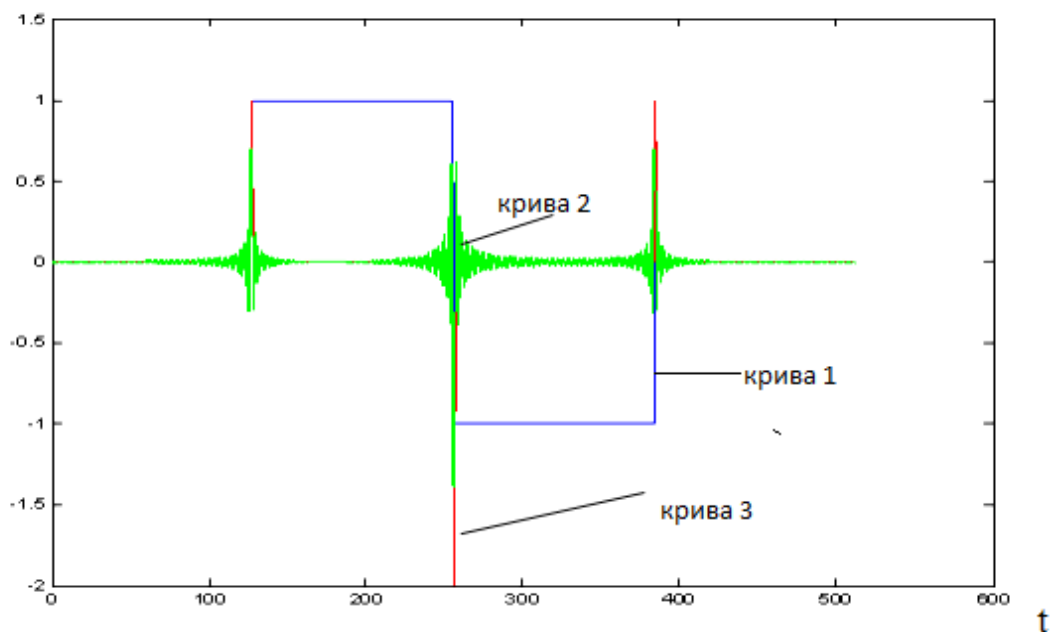
Відзначена властивість перетворення RTF може бути використана при розв'язанні різноманітних задач оброблення сигналів. При цьому важливим є перехід від спектрів перетворення Фур'є до спектрів перетворення RTF і навпаки для реакцій  $\bar{Y}_{\lambda}$  та  $\bar{Y}_{\omega}$ , де

$$\bar{Y}_{\lambda} = \bar{K}(\lambda) \times \bar{F}_H \times \bar{x}_t, \quad (15a)$$

$$\bar{Y}_{\omega} = \bar{K}(j\omega) \times \bar{F}_H \times \bar{x}_t. \quad (15b)$$

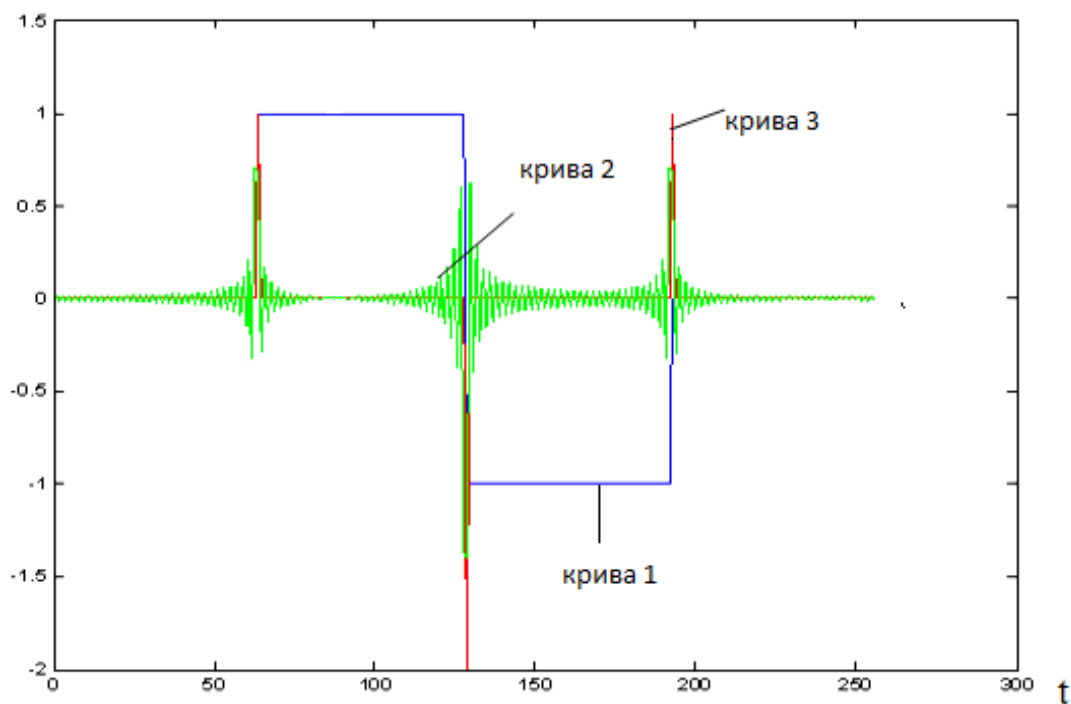
В залежності від наявної інформації можливі різні алгоритми переходу від одного перетворення до іншого.

$U(t)$



а

$U(t)$



б

Рис. 2.

Аналогічно до розглянутої теореми про диференціювання оригіналу в області перетворення RTF та перетворення Фур'є можна сформулювати



парну теорему про диференціювання спектру. Так, для перетворення Фур'є відомо, що якщо  $x_t(t) \leftrightarrow X_\omega(j\omega)$ , то для похідної від спектру

$$dX_\omega(j\omega)/d\omega \leftrightarrow x_{td\omega}(t) \text{ вірно}$$

$$x_{td\omega}(t) \leftrightarrow -jt \times x_t(t), \quad (16)$$

тобто диференціювання спектру сигналу (образу) відповідає множення вихідного сигналу (в натуральних координатах) на множник  $-jt$ .

Для дискретних перетворень аналогічно до (10) можна записати

$$\bar{x}_{td\omega} = \bar{\lambda}^* \times \bar{x}_t, \quad (17)$$

де  $\bar{x}_{td\omega}$  — стовпець дискретних відліків оригіналу похідної від спектру  $\bar{X}_{\omega d\omega}$ ;  $\bar{\lambda}^*$  — діагональна матриця. Елемент цієї матриці  $\lambda_1 = 1 - \exp(+j2\pi/N)$  при великих  $N$  можна представити як  $\lambda_1 = -j \times (2\pi/N) \approx -j \times \Delta t$ , тобто  $2\pi/N$  має сенс нормованого часу.

### Перехід від перетворення Фур'є до перетворення RTF

Так, відповідно до виразів (15) спектри реакцій  $\bar{Y}_\lambda, \bar{Y}_\omega$  можуть бути знайдені, якщо надано електричну схему пристрою, до якого підключено сигнал дії. В цьому разі відомими методами теорії кіл та теорії систем знаходять символічне зображення диференційного рівняння (4) (заміною операцій диференціювання на символ  $p$ ) і далі замінюють в функції кола

$$K(p) = \frac{b_n \times p^n + b_{n-1} \times p^{n-1} + \dots + b_1 \times p + b_0}{a_m \times p^m + a_{m-1} \times p^{m-1} + \dots + a_1 \times p + a_0} \quad (18)$$

символ  $p$  на змінну  $j\omega$  (при використанні перетворення Фур'є) або  $\lambda$  (при використанні перетворення RTF).

Більш складним є випадок, коли схемна модель лінійної системи є невідомою і є лише частотна характеристика (або імпульсна характеристика) реакції  $\bar{Y}_\omega$  у вигляді дискретних відліків фазової та амплітудної характеристик. В цьому випадку можна, скориставшись з методів апроксимації функцій поліномами  $M$ -го порядку, з певною точністю представити

$$|K(j\omega)| = K_0 + K_1 \times \omega + K_2 \times \omega^2 + K_3 \times \omega^3 + \dots + K_M \times \omega^M;$$

$$\varphi_K(\omega) = \varphi_0 + \varphi_1 \times \omega + \varphi_2 \times \omega^2 + \varphi_3 \times \omega^3 + \dots + \varphi_M \times \omega^M,$$

після чого, при форматі дискретного перетворення  $N$  підставити замість

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \times k \text{ відповідні } \lambda_k = 1 - \exp\{-(j2\pi/N) \times k\}.$$

Найбільш простий спосіб апроксимації базується на розкладі функції системи в ряд Тейлора

$$K(p) = K_{T0} + K_{T1}(p) \times p + K_{T2}(p) \times p^2 + K_{T3}(p) \times p^3 + \dots + K_{TB}(p) \times p^B + \dots, \quad (19)$$

де  $K_{Ti}(p)$  — коефіцієнти ряду, які складаються зі значень похідних та факторіальних коефіцієнтів. Ряд (при необмеженій кількості його) членів схо-

диться, якщо функція системи (кола) не має розривів вздовж осі частот (є стійкою). Функція (18), яку можна розкласти як (19) надана у вигляді частотної характеристики Фур'є (тобто в виразі (19) формальні змінні замінено на частоти  $j\omega$ ). Для переходу від частот  $j\omega$  до комплексних частот  $\lambda$  необхідно за частотною характеристикою функції (18) обчислити похідні. Такі похідні можна обчислити як різниці між сусідніми значеннями функції системи, поділені на інтервал  $\omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/N$ . Тоді першу похідну в (19) для частоти  $\omega = \omega_k$  можна записати у вигляді

$$\frac{dK}{d\omega} = \frac{K(\omega_{k+1}) - K(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} = \frac{K(\omega_{k+1}) - K(\omega_k)}{2\pi/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (20)$$

При цьому в (19) ця похідна множиться на частоту  $\omega_k = \frac{2\pi}{N} \times k$ . Таким чином, для обчислення першої складової  $K_{T1}(p) \times p$  необхідно обчислити за (20) першу похідну  $K_d(j\omega_k)$  за частотою  $j\omega$  від наданого спектру  $K(j\omega_k)$  і помножити дискретні значення  $k$ -х спектральних складових похідної на корегуючий множник  $\lambda_k/j\omega_k$ . Аналогічно, по першій похідній  $K_d(j\omega_k)$  можна знайти другу похідну  $K_{d2}(j\omega_k)$ , кожен -й відлік якої слід помножити на множник  $(\lambda_k/j\omega_k)^2$ . Нарешті, в  $b$ -тій похідній  $K_{db}(j\omega_k)$  кожен  $k$ -й відлік слід помножити на  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  і т.д. Аналогічно, якщо слід перейти від аргументу  $\lambda_k$  до  $j\omega_k$ , то похідні, обчислені за частотною характеристикою  $K(\lambda)$  за вказаною процедурою дають можливість отримати частотну характеристику  $K(j\omega_k)$ . При цьому корегуючий множник має вигляд  $(j\omega_k/\lambda_k)^b$ . Успіх переходу від однієї апроксимації до другої залежить від трудоемності такого переходу. Трудоемність, в свою чергу, залежить від швидкості спадання членів ряду (19). А ця швидкість залежить від множників  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$ . Як приклад розглянемо множники для перших восьми похідних при форматі частотної характеристики функції (18)  $N = 16$ . Результати обчислень подані в табл. 1, де наведено лише множники для  $\lambda_1 \dots \lambda_8$ , оскільки  $\lambda_1^* = \lambda_{15} \dots \lambda_7^* = \lambda_9$  і такими ж спряженими будуть множники  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$ . З табл. 1 видно швидкість, з якою при використанні перетворення RTF зменшуються амплітуди спектру Фур'є сигналу, що проходить через лінійну систему (16). При виборі кроку дискретизації сигналу більшим, ніж половина періоду колювання реакції системи, перетворення RTF не може відобразити таке колювання. Загасання на високих частотах (як це видно з залежності множника  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  від частоти, наприклад, для першої похідної - перший рядок табл. 1) стає великим (в 1,561 рази для першої похідної, та в 35,19 разів для восьмої похідної - восьмий рядок табл. 1).



Таблиця 1

$b$	$(\lambda_1/j\omega_1)^b$	$(\lambda_2/j\omega_2)^b$	$(\lambda_3/j\omega_3)^b$	$(\lambda_4/j\omega_4)^b$	$(\lambda_5/j\omega_5)^b$	$(\lambda_6/j\omega_6)^b$	$(\lambda_7/j\omega_7)^b$	$(\lambda_8/j\omega_8)^b$
1	$0,9936 \times \exp\{j(11,25^\circ)\}$	$0,9745 \times \exp\{j(22,5^\circ)\}$	$0,9432 \times \exp\{j(33,75^\circ)\}$	$0,9002 \times \exp\{j(45^\circ)\}$	$0,8469 \times \exp\{j(56,25^\circ)\}$	$0,7843 \times \exp\{j(67,5^\circ)\}$	$0,7136 \times \exp\{j(78,75^\circ)\}$	$j \times 0,6366$
2	$0,9872 \times \exp\{j(22,5^\circ)\}$	$0,9497 \times \exp\{j(45^\circ)\}$	$0,8896 \times \exp\{j(67,5^\circ)\}$	$j0,811$	$0,7172 \times \exp\{j(112,5^\circ)\}$	$0,6165 \times \exp\{j(135^\circ)\}$	$0,5092 \times \exp\{j(157,5^\circ)\}$	$-0,4053$
3	$0,9809 \times \exp\{j(33,75^\circ)\}$	$0,9255 \times \exp\{j(67,5^\circ)\}$	$0,8392 \times \exp\{j(101,25^\circ)\}$	$0,7295 \times \exp\{j(135^\circ)\}$	$0,6074 \times \exp\{j(168,75^\circ)\}$	$0,4835 \times \exp\{-j(157,5^\circ)\}$	$0,3633 \times \exp\{-j(123,75^\circ)\}$	$-j0,258$
4	$0,9746 \times \exp\{j(45^\circ)\}$	$j0,9019$	$0,7914 \times \exp\{j(135^\circ)\}$	$-0,6567$	$0,5144 \times \exp\{-j(135^\circ)\}$	$-j0,3801$	$0,2593 \times \exp\{-j(45^\circ)\}$	$0,1643$
5	$0,9683 \times \exp\{j(56,25^\circ)\}$	$0,8789 \times \exp\{j(112,5^\circ)\}$	$0,7465 \times \exp\{j(168,75^\circ)\}$	$0,5912 \times \exp\{-j(135^\circ)\}$	$0,4356 \times \exp\{-j(78,75^\circ)\}$	$0,2981 \times \exp\{j(22,5^\circ)\}$	$0,185 \times \exp\{j(33,75^\circ)\}$	$j 0,1046$
6	$0,9622 \times \exp\{j(67,5^\circ)\}$	$0,8566 \times \exp\{j(135^\circ)\}$	$0,7041 \times \exp\{-j(157,5^\circ)\}$	$-j 0,5322$	$0,3689 \times \exp\{-j(22,5^\circ)\}$	$0,2338 \times \exp\{j(45^\circ)\}$	$0,1321 \times \exp\{j(112,5^\circ)\}$	$0,06656$
7	$0,956 \times \exp\{j(78,75^\circ)\}$	$0,8347 \times \exp\{j(157,5^\circ)\}$	$0,6641 \times \exp\{-j(123,75^\circ)\}$	$0,4791 \times \exp\{-j(45^\circ)\}$	$0,3124 \times \exp\{j(33,75^\circ)\}$	$0,1838 \times \exp\{j(112,5^\circ)\}$	$0,09423 \times \exp\{-j(168,75^\circ)\}$	$-j 0,042$
8	$j0,9498$	$-0,8134$	$-j 0,6263$	$0,4313$	$j0,2646$	$-0,1445$	$-j 0,06724$	$0,02699$

Зменшення ваги вихідних частотних складових різних частот для різних похідних також буде різним, що можна побачити, аналізуючи значення множників  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  по стовпцям табл. 1. Так, для першої за номером частоти таке зменшення для десятої похідної у порівнянні з першою становить 1,046 разів, а для найбільшої частоти (нашому прикладі восьмої) — 23,59 разів.

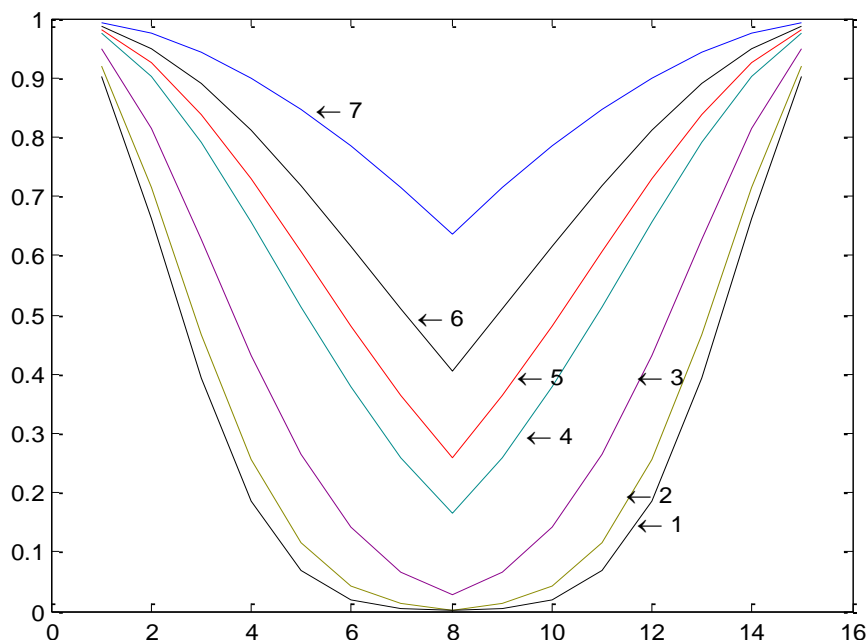


Рис.3

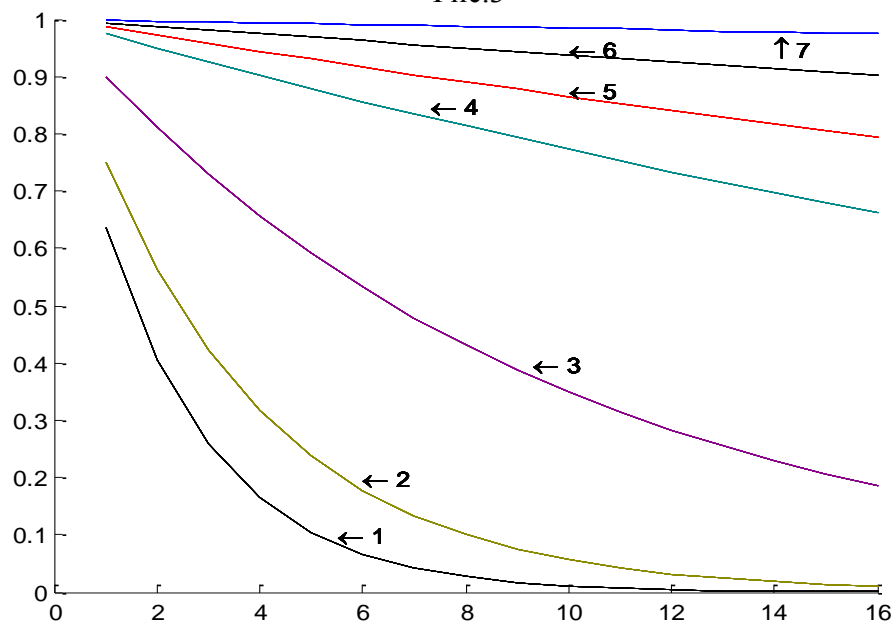


Рис.4

На рис. 3 наведено частотні залежності, які є ваговими функціями для частотних залежностей похідних розкладу функції системи в ряд Тейлора (18). Так, крива 1 на рис.3 відповідає значенню корегуючого множника

$(\lambda_k/j\omega_k)^1$ , крива 2 —  $(\lambda_k/j\omega_k)^2$ , а крива 7 —  $(\lambda_k/j\omega_k)^{16}$ . Аналогічно на рис. 4 крива 1 відповідає значенню корегуючого множника  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  при  $k = 1$ , крива 2 —  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  при  $k = 2$ , а крива 7 —  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$  при  $k = 16$ .

Оскільки в загальному випадку коефіцієнти  $K_{TB}(p)$  в (18) невідомі, то невідомі вагові коефіцієнти для підсумовування частотних залежностей

$$K_U(p) = \frac{p^2 + 4,713 \cdot 10^3 \cdot p + 5,552}{p^2 + 0,04949 \cdot p + 5,552} \quad (21)$$

похідних, але в будь-якому разі перехід від перетворення Фур'є до перетворення RTF аналогічно множенню спектру вхідного сигналу на частотну характеристику коефіцієнта передачі фільтра низьких частот. Це, з одного боку, явище корисне, оскільки при цьому подавляються паразитні осциляції (рис. 2), притаманні перетворенню Фур'є, а, з іншого боку, шкідливе, оскільки на високих частотах спотворюються частотні характеристики, наприклад, коливальних контурів, що виключає з результатів аналізу коливальні процеси, які насправді мають місце. Для запобігання таким шкідливим властивостям треба нормувати оброблювані сигнали таким чином, щоб головна частина їх спектрів потрапляла в область відносно малих частот, що для коливальних процесів відповідає вибору такого кроку дискретизації, який забезпечував би відносно велику кількість відліків сигналу на періоді колювання.

### Приклади розрахунків

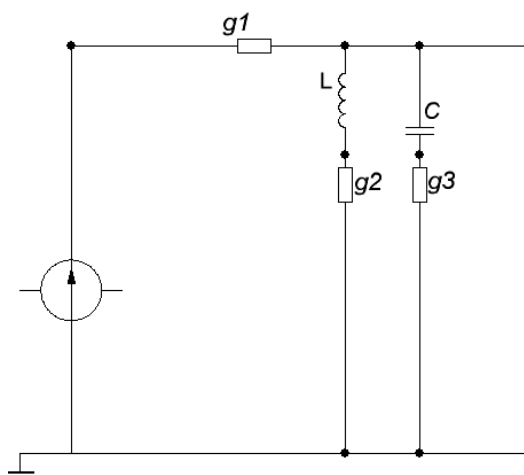


Рис. 5

Для ілюстрації запропонованого методу переходу від трансформант перетворення Фур'є до трансформант перетворення RTF розглянемо приклад, обраний з міркувань наочності ілюстрації та простоти перевірки отриманих результатів. Нехай лінійна система представлена колом, схему якого наведено на рис. 5.

Коефіцієнт передачі напруги цього кола в операторній формі має вигляд

З наступними нормованими значеннями параметрів

$$C = \frac{2}{30 \cdot \pi}, \quad L = \frac{8}{0,3 \cdot \pi}, \quad R_1 = 100, R_2 = R_3 = 4 \cdot 10^4$$

Підставляючи в (21) нормовані значення частоти  $j\omega_k$  та  $\lambda_k$ , отримаємо амплітудно-частотні характеристики коефіцієнта передачі в базисі Фур'є та РТФ (рис. 6 та рис. 7 відповідно).

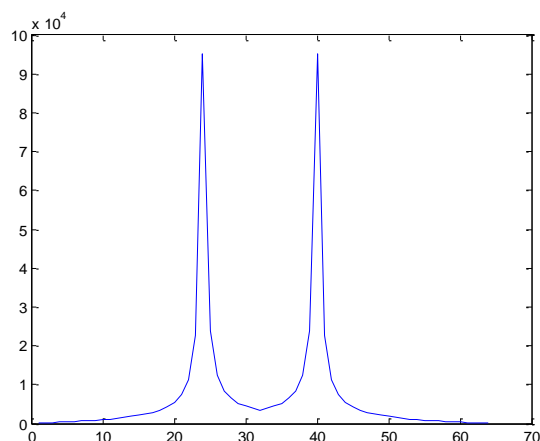


Рис. 6

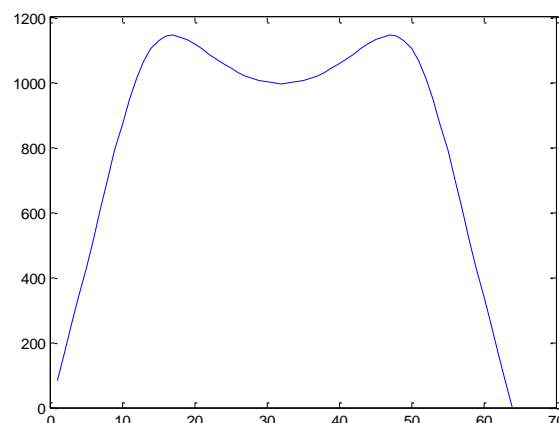


Рис. 7

На рис. 8 та рис. 9 наведено відповідні фазові характеристики.

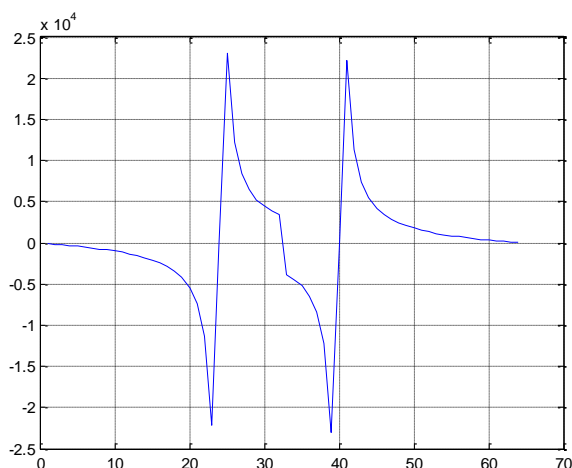


Рис. 8

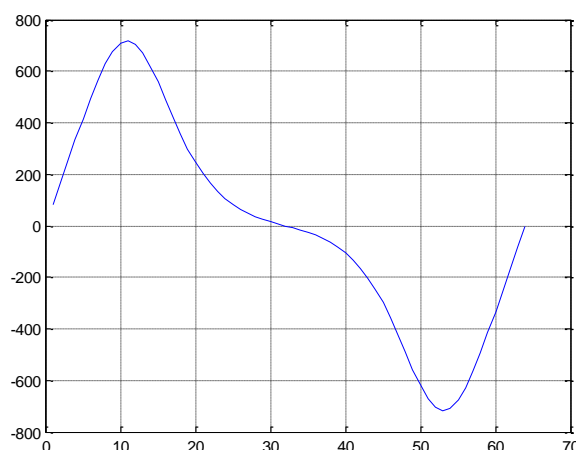


Рис. 9

Зробимо тепер перехід від частотної характеристики в області перетворення Фур'є (рис.6, рис. 8) до частотної характеристики в перетворенні РТФ, скориставшись виразами (17), (18) та множником переходу  $(\lambda_k/j\omega_k)^b$ .

Перехід від частотної характеристики в області перетворення Фур'є до частотної характеристики в перетворенні РТФ здійснюється розкладанням в ряд Тейлора третього порядку.

При цьому з частотної характеристики рис.6, рис. 8 було отримано частотні характеристики рис. 10, рис. 12. Аналогічно, за тими самими формулами (знову ж не за аналітичним виразом, а за чисельними значеннями трансформант спектру РТФ), але вже за допомогою множника  $(j\omega_k/\lambda_k)^b$  з частотної характеристики рис. 7, рис. 9 за ті самі три кроки була отримана частотна характеристика рис. 11, рис. 13. На рисунках пунктиром зображено результат переходу амплітудних характеристик від  $K(\lambda_k)$  до  $K(j\omega_k)$  на рис. 10 і від  $K(j\omega_k)$  до  $K(\lambda_k)$  на рис. 11. Аналогічні криві для фазових ха-

ракетистик наведено на рис. 12 та рис. 13.

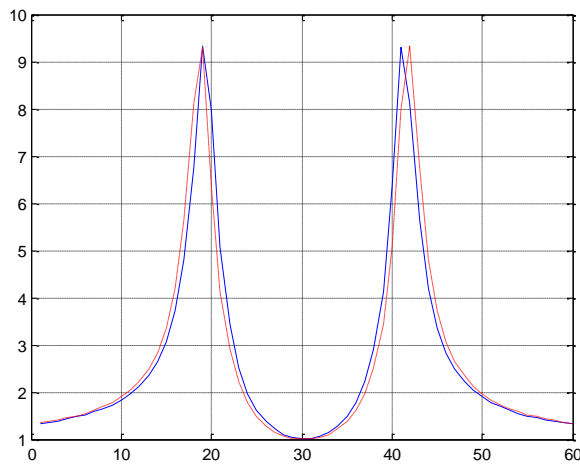


Рис. 10

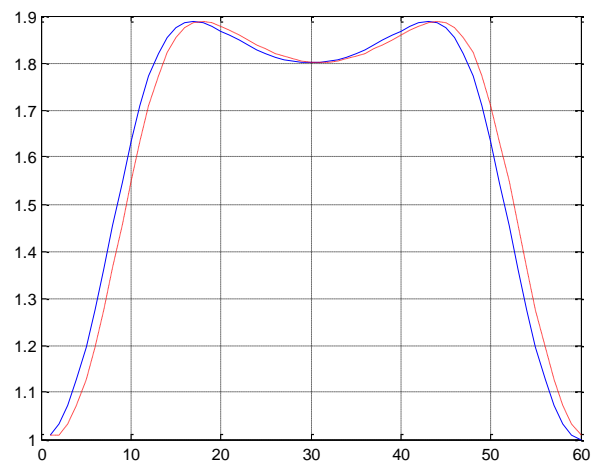


Рис. 11

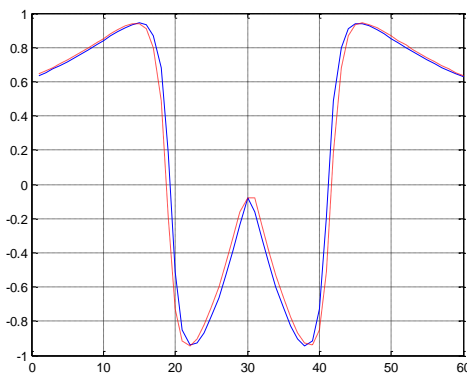


Рис.12

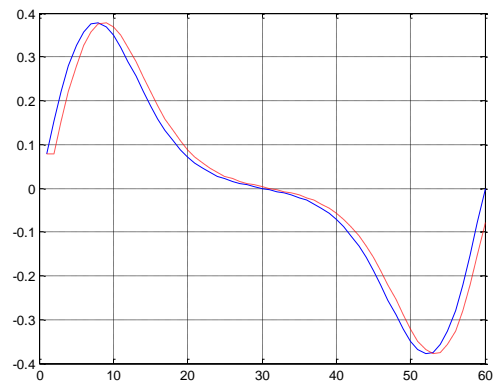


Рис.13

Розглянуті приклади ілюструють коректність запропонованого способу переходу від перетворення RTF до перетворення Фур'є і навпаки.

Звичайно, приклад з колом, схему якого наведено на рис.5 призначений лише для ілюстрації правильності запропонованого алгоритму переходу від перетворення Фур'є до перетворення RTF і навпаки. На практиці перехід від частотної характеристики системи, схема і, відповідно, аналітичний запис її системної функції невідомі. Тоді слід за частотною характеристикою обчислювати похідні ряду Тейлора доти, доки результат апроксимації не стане практично незмінним при збільшенні числа членів ряду.

### Висновки

1. При використанні перетворення RTF, яке є «калькою» різницьових методів в частотній області, відсутні негативні ефекти перетворення Фур'є, пов'язані з обмеженою кількістю членів ряду (обмеженим форматом перетворення Фур'є).

2. Велике «загасання» амплітудних характеристик перетворення RTF у порівнянні до перетворення Фур'є пов'язане з тим, що крок дискретизації

зації різницевих методів може бути таким «великим», що дрібні деталі (наприклад, періоди осциляцій на високих частотах) стають сумірними з цим кроком. Але відповідне нормування спектрів або збільшення формату перетворення дозволяють компенсувати ці негативні властивості перетворення RTF.

3. Запропонований алгоритм переходу від спектрів перетворення RTF до спектрів перетворення Фур'є є достатньо простим і легко програмованим для обчислень на ПЕОМ.

#### **Література**

1. Рыбин А.И. Анализ электрических цепей в натуральных координатах на базе ортогональных преобразований с действительным ядром / А.И. Рыбин, В.В. Пилинский, М.В. Родионова // *Праці Інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наук. Праць.* – 2004.— №1 (7).— С.7— 12.
2. Рыбин А.И. Анализ электрических цепей в натуральных координатах на базе ортогональных преобразований с действительным ядром / А.И. Рыбин, М.В. Родионова // *Праці Інституту електродинаміки НАНУ: – 2004.— №3 (9).* С.11— 14.
3. Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразований Уолша / А.И. Рыбин // *Радиоэлектроника* — 2004.— №5.— С. 36 — 41 (Изв. вузов).
4. Рыбин А.И. Метод модификаций для анализа линейных цепей в базисе функций Уолша / А.И. Рыбин // *Радиоэлектроника* — 2004.— №6.— С. 36 — 41 (Изв. вузов).
5. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара / О.І. Рибін, А.П. Ткачук // *Вісник НУТУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.*— 2006.— №33.— С.14— 23.
6. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення EIWAL / О.І. Рибін, А.П. Ткачук // *Вісник НУТУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.*— 2006.— №33.— С.31— 38.
7. Рыбин А.И. Анализ линейных систем в области трансформант собственных частот преобразования RTF / А.И. Рыбин, А.П. Ткачук // *Радиоэлектроника* — 2006.— №11.— С. 56 — 63 (Изв. вузов).
8. Рибін О.І. Властивості перетворення RTF / О.І. Рибін, Ю.Х., Ніжебецька, С.С. Наталенко // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління.* —2010.—№1(20).— С.93—97.

*Рибін О.І., Іванюк Н.О. Зв'язок між перетвореннями RTF та Фур'є. В роботі запропоновано алгоритми переходу від перетворення RTF до перетворення Фур'є і навпаки при різних представленнях функцій лінійної системи (у вигляді дробно-раціональної функції, імпульсної характеристики та частотної характеристики). Показано позитивні та негативні властивості обох перетворень. Наведено приклад, що ілюструє простоту і точність результатів при реалізації запропонованих алгоритмів переходу. Запропоновані алгоритми достатньо просто програмуються для обчислень на ПЕОМ.*

**Ключові слова:** Перетворення RTF та Фур'є, ряд Тейлора, Частотні характеристики, функція кола, ортогональні перетворення, теорема про диференціювання оригіналу та частотної характеристики

*Рыбин А.И., Иванюк Н.А. Связь между преобразованиями RTF и Фурье. В работе предложены алгоритмы перехода от преобразования RTF к преобразованию Фурье*



и наоборот при различных представлениях функций линейной системы (в виде дробно-рациональной функции, импульсной характеристики и частотной характеристики). Показано положительные и отрицательные свойства обоих преобразований. Приведен пример, иллюстрирующий простоту и точность результатов при реализации предложенных алгоритмов перехода. Предложенные алгоритмы достаточно просто программируются для вычислений на ПЭВМ.

**Ключевые слова:** Преобразование RTF и Фурье, ряд Тейлора, частотные характеристики, функция цепи, ортогональные преобразования, теорема о дифференцировании оригинала и частотной характеристики.

Rybin A.I., Ivaniuk N.A. **The relationship between RTF and Fourier transform.** The algorithms of transition from RTF transform to Fourier transform and vice versa in different representations of functions of the linear system (in the form of a rational function, impulse characteristic and frequency characteristic) are proposed in the article. Both the positive and negative features of those transformations are revealed. An example to illustrate the simplicity and accuracy of the results if the proposed algorithms of the transition are implementation is shown. The algorithms can be easily worked out PC calculation.

**Keywords:** RTF transform and Fourier transform, Taylor series, frequency characteristics, the function of the chain, orthogonal transformation, the theorem on differentiation of the original and the frequency characteristic.